2

다항식의 곱셈과 인수분해

휴대 전화나 가전제품이 고장 나면 그것을 분해하여 결함이 있는 부속을 교체하고 분해한 역순으로 다시 조립한다. 이 분해와 조립과 같은 관계는 수학에서도 찾아볼 수 있다. 두 개 이상의 다항식의 곱을 하나의 다항식으로 만드는 전개와 하나의 다항식을 몇 개의 다항식의 곱으로 나타내는 인수분해가 바로 그런 관계이다.

유클리드(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)의 『원론(Elements)』에는 다항식의 곱을 전개하는 곱셈 공식이 기술되어 있다.

[출처: H. Eves(이우영 · 신항균 역), 『수학사』]

이 단원에서는 다항식의 곱을 전개하는 방법과 인수분해하는 방법에 대하여 배운다.

준비해 볼까?

1 다음 수를 소인수분해하시오.

(1) 12　　(2) 30

(3) 72　　(4) 108

2 다음 식을 계산하시오.

(1) $2a+3a$　　(2) $6a-a$

(3) $5a\times 3$　　(4) $4a\div\frac{1}{2}$

3 다음 식을 계산하시오.

(1) $(2a+3b)+(a+2b)$　　(2) $(x+4y)-(2x-y)$

(3) $(2x^2+x-4)-(x^2-5x+6)$

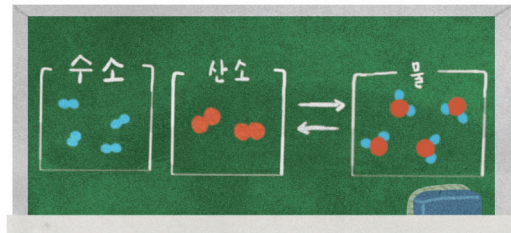
4 다음 식을 계산하시오.

(1) $2a(3a+5)$　　(2) $5x(x-1)$

(3) $(6ab+10b)\div 2b$　　(4) $(3x^2y+9y)\div(-3y)$

이야기로 여는 수학

2.0 물과 수소

에너지를 얻기 위해 석유나 석탄 등의 화석 연료를 연소하면 온실가스가 발생하고 대기를 오염시키지만, 수소를 연소하면 에너지와 물밖에 남지 않기 때문에 수소는 환경오염 물질을 발생시키지 않는 청정 에너지원입니다.

이러한 이유로 수소를 이용한 전지는 여러 분야에서 사용되고 있으며, 이를 활용한 수소 자동차도 일상적으로 쓰이게 될 수준에 이르렀습니다.

수소는 점점 고갈되고 있는 화석 연료에 비해 지구 표면의 70 %를 차지하고 있는 물을 전기 분해하여 얻을 수 있으므로 미래의 에너지원으로서 그 활용도가 더욱 높아질 것으로 예상됩니다.

이러한 물과 수소는 미래의 자원일 뿐만 아니라 우리 생활 곳곳에서 사용되고 있습니다.

[출처: 홍준의 · 최후남 · 고현덕 · 김태일, 『살아있는 과학 교과서 1』]

- 물과 수소가 우리에게 미치는 영향에 대하여 말해 보자.

태도 및 실천

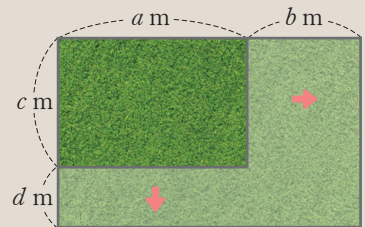
- 우리 주변에서 수소와 산소의 결합과 물의 전기 분해와 같은 관계가 있는 것을 찾아 말해 보자.

2.1 다항식의 곱셈

학 | 습 | 목 | 표

• 다항식의 곱셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

동물 농장 만들기

오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 a m이고, 세로의 길이가 c m인 직사각형 모양의 풀밭을 가로의 길이는 b m만큼, 세로의 길이는 d m만큼 늘여 직사각형 모양의 동물 농장을 만들려고 합니다. 이 동물 농장의 넓이를 구하는 방법을 생각해 봅시다.

활동 1 동물 농장의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 구해 보자.

활동 2 동물 농장의 가로의 길이와 세로의 길이를 이용하여 이 동물 농장의 넓이를 구해 보자.

생각 1

동물 농장의 넓이를 어떻게 나타낼 수 있나요?

생각 열기에서 동물 농장의 가로의 길이는 $(a+b)$ m, 세로의 길이는 $(c+d)$ m이므로 이 동물 농장의 넓이는

$$(a+b)(c+d)\ \mathrm{m}^2$$

이다.

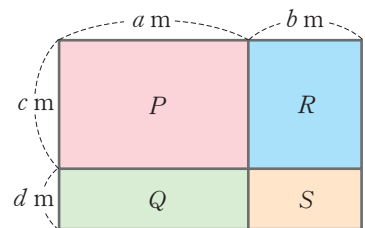
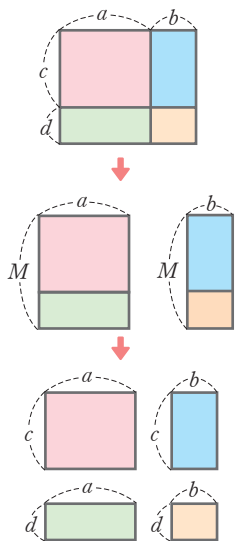
한편, 동물 농장의 넓이는 오른쪽 그림에서 P, Q, R, S의 넓이의 합과 같으므로

$$ac+ad+bc+bd\ (\mathrm{m}^2)$$

이다. 따라서

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

임을 알 수 있다.

이것은 $(a+b)(c+d)$를 분배법칙을 이용하여 하나의 다항식으로 만든 것과 같다.

다항식과 다항식의 곱셈에서도 분배법칙을 이용하여 하나의 다항식으로 나타내는 것을 전개한다고 한다.

즉, $(a+b)(c+d)$에서 $c+d$를 한 문자 M으로 놓고 전개하면

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)&=(a+b)M\\&=aM+bM\end{aligned}$$

이다. 이때 M에 $c+d$를 대입하여 전개하면

$$\begin{aligned}aM+bM&=a(c+d)+b(c+d)\\&=ac+ad+bc+bd\end{aligned}$$

이다.

이와 같이 다항식과 다항식의 곱셈은 단항식과 다항식의 곱셈과 마찬가지로 분배법칙을 이용하여 하나의 다항식으로 전개할 수 있다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

다항식의 곱셈

$$(a+b)(c+d)=\underset{①}{ac}+\underset{②}{ad}+\underset{③}{bc}+\underset{④}{bd}$$

문제 1 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+3)(b-5)$ (2) $(3a-2)(b+4)$

(3) $(a+2b)(3c+4d)$ (4) $(2a-b)(3c-2d)$

다항식과 다항식의 곱셈을 전개할 때, 전개식에 동류항이 있으면 동류항끼리 모아서 간단히 정리하여 나타낸다.

예제 1 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+b)(a-2b)$ (2) $(x+3)(2x+1)$

풀이 | (1) $(a+b)(a-2b)=a\times a+a\times(-2b)+b\times a+b\times(-2b)$

$=a^2-2ab+ab-2b^2=a^2-ab-2b^2$

(2) $(x+3)(2x+1)=x\times 2x+x\times 1+3\times 2x+3\times 1$

$=2x^2+x+6x+3=2x^2+7x+3$

답 (1) $a^2-ab-2b^2$ (2) $2x^2+7x+3$

문제 2 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+1)(a+2)$　　(2) $(x-2)(x+3)$

(3) $(a-b)(a+2b)$　　(4) $(2x-y)(x-3y)$

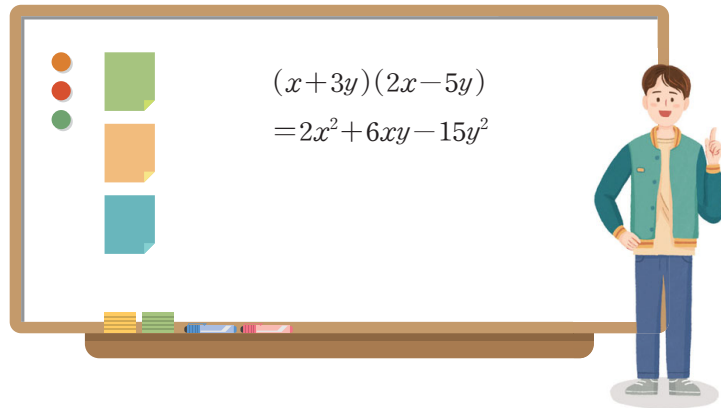
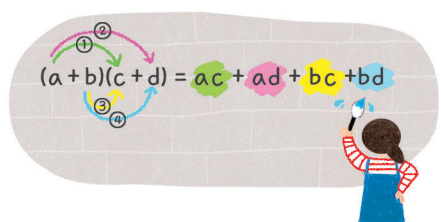
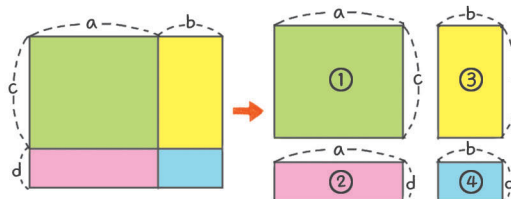
다음은 민재가 $(x+3y)(2x-5y)$를 전개한 것이다. 잘못된 부분을 찾아 바르게 고치고, 왜 그렇게 고쳤는지 친구와 이야기해 보자.

동료 평가

• 친구가 잘못된 부분을 바르게 고쳤는가?

• 친구가 고친 이유에 대해 적절히 설명하였는가?

스스로 해결하기

1

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 다항식과 다항식의 곱셈에서도 단항식과 다항식의 곱셈과 마찬가지로 분배법칙을 이용하여 하나의 다항식으로 나타내는 것을 □ 한다고 한다.

(2) $(a+b)(c+d)$를 전개하면 □ 이다.

2

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+1)(b+2)$　(2) $(x+3)(y-5)$

(3) $(2a-1)(b-3)$　(4) $(3x+1)(2y-1)$

3

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+b)(c-d)$　(2) $(a+2b)(2c+3d)$

(3) $(2a-3b)(c-4d)$　(4) $(3a+4b)(2c-d)$

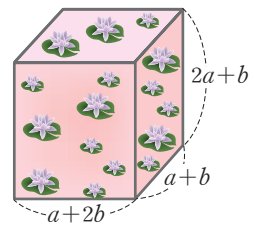
4

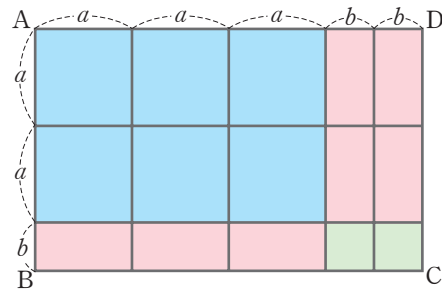
다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)(x+5)$　(2) $(x-1)(x-3)$

(3) $(3x+2)(2x+1)$　(4) $(2x-1)(-5x+4)$

5 추론

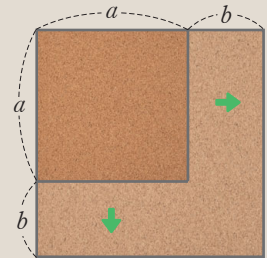
오른쪽 그림과 같이 밑면의 가로의 길이가 $a+2b$, 세로의 길이가 $a+b$, 높이가 $2a+b$인 직육면체 모양의 선물 상자의 겉넓이를 구하시오.

6 과정을 다지는 문제

다음 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 두 다항식의 곱으로 나타내고, 이 식을 전개하는 과정을 쓰시오.

2.2 다항식의 제곱의 전개

학습목표

• 다항식의 제곱을 전개할 수 있다.

정사각형 모양의 게시판 만들기

병주네 반 학생들은 한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 게시판에서 가로의 길이와 세로의 길이를 모두 b만큼 늘인 정사각형 모양의 게시판을 새로 만들려고 합니다. 새로 만든 게시판의 넓이를 생각해 봅시다.

활동 1 새로 만든 게시판의 한 변의 길이를 구해 보자.

활동 2 새로 만든 게시판의 한 변의 길이를 이용하여 이 게시판의 넓이를 구해 보자.

생각 1

다항식의 제곱은 어떻게 전개할 수 있나요?

생각 열기에서 새로 만든 게시판의 한 변의 길이는 $a+b$이므로 새로 만든 게시판의 넓이는 $(a+b)^2$이다.

한편, 새로 만든 게시판의 넓이는 오른쪽 그림에서 P, Q, R, S의 넓이의 합과 같으므로

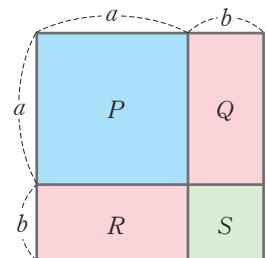
$$a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

이다. 따라서

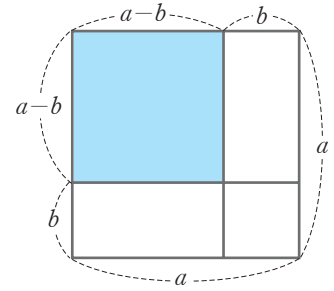
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

임을 알 수 있다.

이것은 $(a+b)^2$을 $(a+b)(a+b)$로 고친 후 분배법칙을 이용하여 다음과 같이 전개한 것과 같다.

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

$$=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

같은 방법으로 $(a-b)^2$을 전개하면 다음과 같다.

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)$$
$$=a^2-ab-ab+b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

곱셈 공식 – 다항식의 제곱

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

예제 1

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+2b)^2$ (2) $(2x-3y)^2$

풀이 | (1) $(a+2b)^2=a^2+2\times a\times 2b+(2b)^2$
$=a^2+4ab+4b^2$

(2) $(2x-3y)^2=(2x)^2-2\times 2x\times 3y+(3y)^2$
$=4x^2-12xy+9y^2$

답 (1) $a^2+4ab+4b^2$ (2) $4x^2-12xy+9y^2$

문제 1 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $(a+1)^2=a^2+\square a+1$ (2) $(x-4)^2=x^2-\square x+16$

(3) $(2a+5)^2=4a^2+\square a+\square$ (4) $(3x-7)^2=9x^2-\square x+\square$

문제 2 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+3)^2$ (2) $(3x-2)^2$

(3) $(4x+5y)^2$ (4) $(2a-7b)^2$

예제 2

곱셈 공식을 이용하여 103^2을 계산하시오.

풀이 | $103^2=(100+3)^2$

$=100^2+2\times100\times3+3^2$

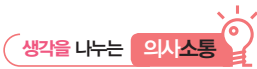
$=10000+600+9$

$=10609$

답 10609

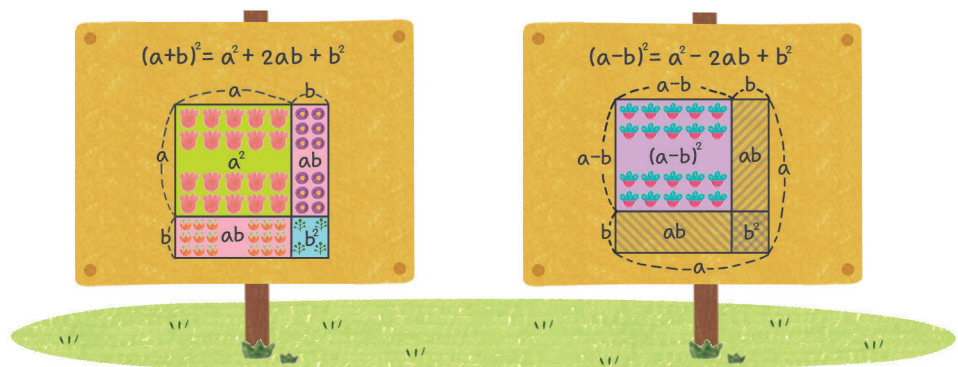
문제 3 곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) 1002^2

(2) 997^2

다음 대화를 읽고, 두 곱셈 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$과 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$의 관계를 이야기해 보자.

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $(a+b)^2=a^2+\square+b^2$

(2) $(a-b)^2=a^2+\square+b^2$

2

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+2)^2$　　(2) $(x-3)^2$

(3) $(x+4)^2$　　(4) $(a-5)^2$

3

다음 식을 전개하시오.

(1) $(3a+4)^2$　　(2) $(2x-3)^2$

(3) $(4x+3y)^2$　　(4) $(3x-5y)^2$

4

다음 식을 전개하시오.

(1) $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2$　　(2) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

5

곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) 105^2　　(2) 999^2

6 추론

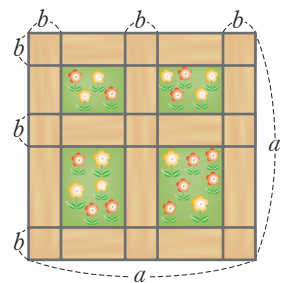
다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $(x+\square)^2=x^2+12x+\square$

(2) $(x-\square)^2=x^2-8x+\square$

(3) $(\square x-8)^2=9x^2-48x+\square$

7 과정을 다지는 문제

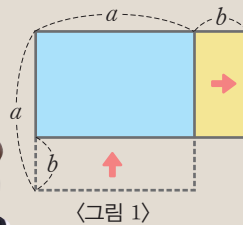
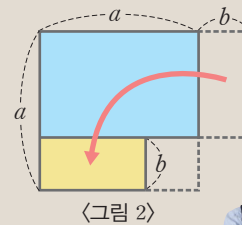
오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 꽃밭에 일정한 폭의 길을 내었을 때, 남은 꽃밭의 넓이를 다항식의 제곱으로 나타내고, 이 식을 전개하는 과정을 쓰시오.

2.3 합과 차의 곱의 전개

학 | 습 | 목 | 표

• 합과 차로 이루어진 두 다항식의 곱을 전개할 수 있다.

생각 열기

변형한 도형의 넓이

다음을 보고 〈그림 1〉과 〈그림 2〉에서 만든 도형의 넓이를 생각해 봅시다.

활동 1 〈그림 1〉에서 만든 직사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내 보자.

활동 2 〈그림 2〉에서 만든 도형의 넓이를 두 정사각형의 넓이의 차로 나타내 보자.

생각 1

〈그림 1〉과 〈그림 2〉에서 만든 도형의 넓이를 각각 어떻게 나타낼 수 있나요?

생각 열기의 〈그림 1〉에서 만든 직사각형의 가로의 길이는 $a+b$이고, 세로의 길이는 $a-b$이므로 그 넓이는

$$(a+b)(a-b)$$

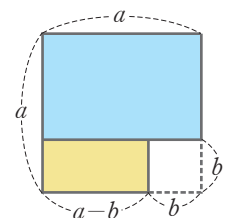
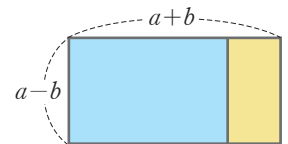
이다.

한편, 〈그림 2〉에서 만든 도형의 넓이를 두 정사각형의 넓이의 차를 이용하여 구하면

$$a^2-b^2$$

이다. 따라서

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

임을 알 수 있다.

이것은 합과 차로 이루어진 두 다항식 $a+b$, $a-b$의 곱 $(a+b)(a-b)$를 분배법칙을 이용하여 다음과 같이 전개한 것과 같다.

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

곱셈 공식 – 합과 차의 곱

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+3)(a-3)$ (2) $(2x-y)(2x+y)$

풀이 | (1) $(a+3)(a-3)=a^2-3^2=a^2-9$

(2) $(2x-y)(2x+y)=(2x)^2-y^2=4x^2-y^2$

답 (1) a^2-9 (2) $4x^2-y^2$

문제 1 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+5)(x-5)$ (2) $(3x-4y)(3x+4y)$

(3) $(-5a+2b)(5a+2b)$ (4) $(-x-y)(-x+y)$

곱셈 공식을 이용하여 107×93을 계산하시오.

풀이 | $107\times93=(100+7)(100-7)$

$=100^2-7^2=10000-49$

$=9951$

문제 2 곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) 52×48 (2) 195×205

곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 분모에 근호가 있는 분수의 분모를 유리화할 수 있다.

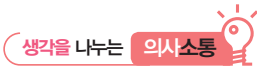
$\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$의 분모를 유리화하시오.

풀이 | $\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=4-2\sqrt{3}$

답 $4-2\sqrt{3}$

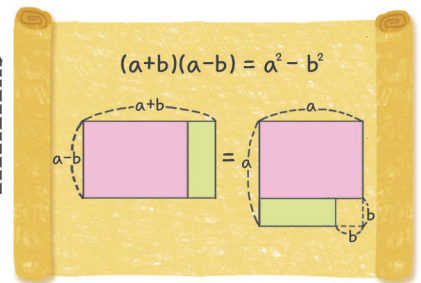
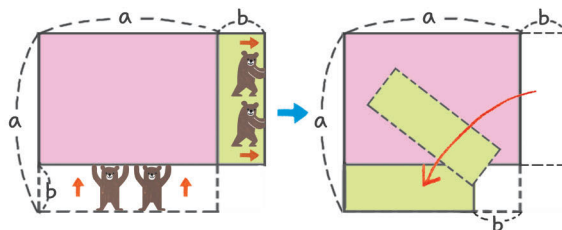
문제 3 다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

(2) $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}$

25.1×24.9를 계산해 보고, 자신의 풀이 방법을 이야기해 보자.

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $(a+b)(a-b)=\square$

(2) $(x-y)(x+y)=\square$

2

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+2)(a-2)$　　(2) $(x-4)(x+4)$

(3) $(x-7)(-x-7)$　　(4) $(a+9b)(a-9b)$

3

다음 식을 전개하시오.

(1) $(2a+3)(2a-3)$　　(2) $(3x-5)(3x+5)$

(3) $(5x+8y)(5x-8y)$　　(4) $(7x+6y)(-7x+6y)$

4

곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) 198×202　　(2) 5.3×4.7

5

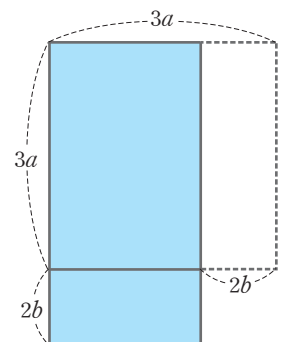
다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$　　(2) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

6 추론

$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$의 값을 구하시오.

7 과정을 다지는 문제

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $3a$인 정사각형에서 세로의 길이를 $2b$만큼 늘이고, 가로의 길이를 $2b$만큼 줄여서 만든 직사각형의 넓이를 두 다항식의 곱으로 나타내고, 이 식을 전개하는 과정을 쓰시오.

2.4 두 일차식의 곱의 전개

학 | 습 | 목 | 표

• 두 일차식의 곱을 전개할 수 있다.

직사각형의 넓이

다음을 보고, 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 생각해 봅시다.

활동 1 <그림 2>에서 만든 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 구해 보자.

활동 2 <그림 3>에서 만든 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 구해 보자.

생각 1 **<그림 3>에서 만든 직사각형의 넓이를 어떻게 나타낼 수 있나요?**

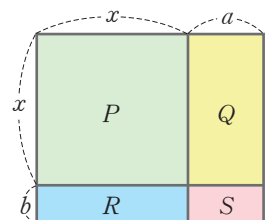
생각 열기의 <그림 3>에서 만든 직사각형의 가로의 길이는 $x+a$, 세로의 길이는 $x+b$이므로 그 넓이는 $(x+a)(x+b)$이다.

한편, <그림 3>에서 만든 직사각형의 넓이는 오른쪽 그림에서 P, Q, R, S의 넓이의 합과 같으므로

$$x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

이다. 따라서

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

임을 알 수 있다.

이것은 두 일차식 $x+a$와 $x+b$의 곱 $(x+a)(x+b)$를 분배법칙을 이용하여 다음과 같이 전개한 것과 같다.

$$(x+a)(x+b)=x^2+bx+ax+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

곱셈 공식 – 두 일차식의 곱 (1)

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

예제 1

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+1)(x+3)$ (2) $(x+1)(x-4)$

풀이 | (1) $(x+1)(x+3)=x^2+(1+3)x+1\times3=x^2+4x+3$

(2) $(x+1)(x-4)=x^2+\{1+(-4)\}x+1\times(-4)=x^2-3x-4$

답 (1) x^2+4x+3 (2) x^2-3x-4

문제 1 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+1)(x+5)$ (2) $(x+2)(x-3)$

(3) $(x-5)(x+3)$ (4) $(x-4)(x-2)$

생각 2 두 일차식 $ax+b$와 $cx+d$의 곱은 어떻게 전개하나요?

두 일차식 $ax+b$와 $cx+d$의 곱 $(ax+b)(cx+d)$를 분배법칙을 이용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d)&=ax\times cx+ax\times d+b\times cx+b\times d\\&=acx^2+adx+bcx+bd=acx^2+(ad+bc)x+bd\end{aligned}$$

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

곱셈 공식 – 두 일차식의 곱 (2)

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

다음 식을 전개하시오.

(1) $(2x+1)(3x+5)$　　(2) $(4x-3)(2x+5)$

풀이 | (1) $(2x+1)(3x+5)=(2\times3)x^2+(2\times5+1\times3)x+1\times5$

$=6x^2+13x+5$

(2) $(4x-3)(2x+5)=(4\times2)x^2+\{4\times5+(-3)\times2\}x+(-3)\times5$

$=8x^2+14x-15$

답 (1) $6x^2+13x+5$　(2) $8x^2+14x-15$

문제 2　다음 식을 전개하시오.

(1) $(4x+1)(2x+3)$　　(2) $(5x+3)(4x-3)$

(3) $(3x-2)(5x+6)$　　(4) $(7x-4)(3x-2)$

동료 평가

• 친구는 예은이와 민재의 방법으로 각각 풀어 보았는가?

• 친구는 내가 비교하여 말한 것을 잘 경청하였는가?

208×195를 예은이와 민재의 방법으로 각각 계산해 보고, 두 학생의 풀이 방법을 비교하여 친구와 이야기해 보자.

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $(x+a)(x+b)=x^2+(\square)x+\square$

(2) $(ax+b)(cx+d)=\square x^2+(\square)x+\square$

2

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)(x+4)$　　(2) $(x+3)(x-8)$

(3) $(x-4)(x+7)$　　(4) $(x-3)(x-7)$

3

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+2)(2x+1)$　　(2) $(3x-1)(2x+5)$

(3) $(2x-3)(2x-1)$　　(4) $(3x-2)(7x-5)$

4

다음을 계산하시오.

$$(x-3)(x-5)+(2x+3)(4x+1)$$

5

$(x+6y)(2y-7x)$를 전개하였을 때, xy의 계수를 구하시오.

6

곱셈 공식을 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) 105×98　　(2) 205×301

7 추론

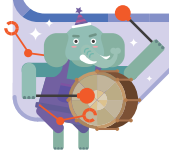
상수 a, b에 대하여

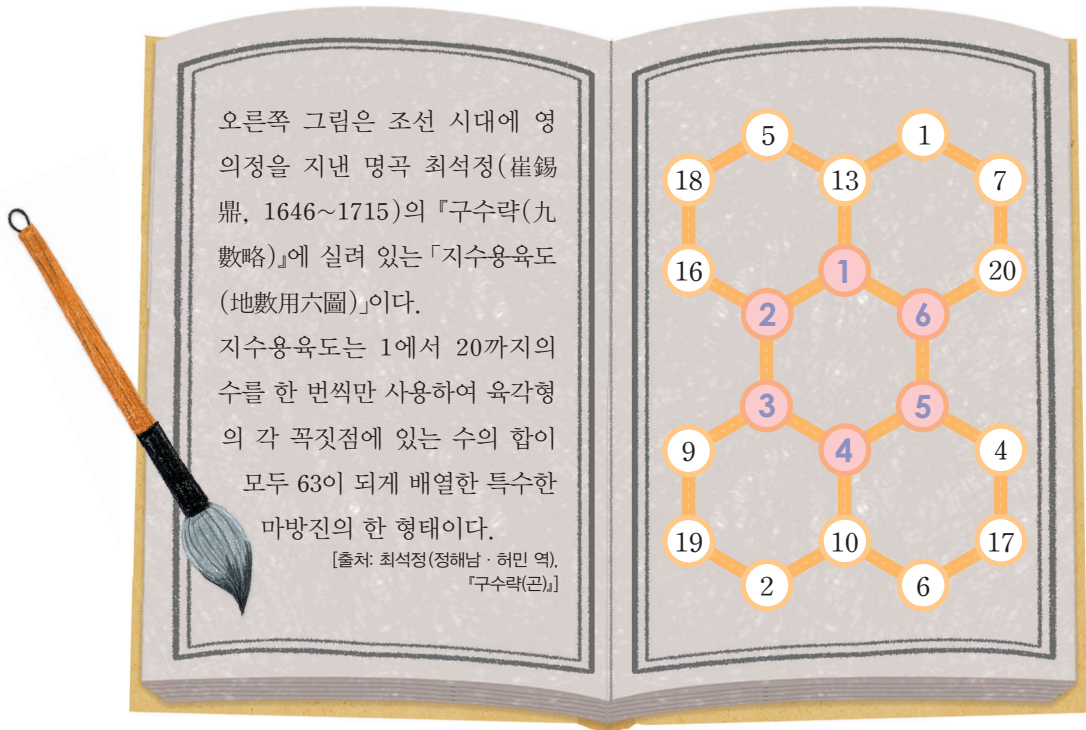
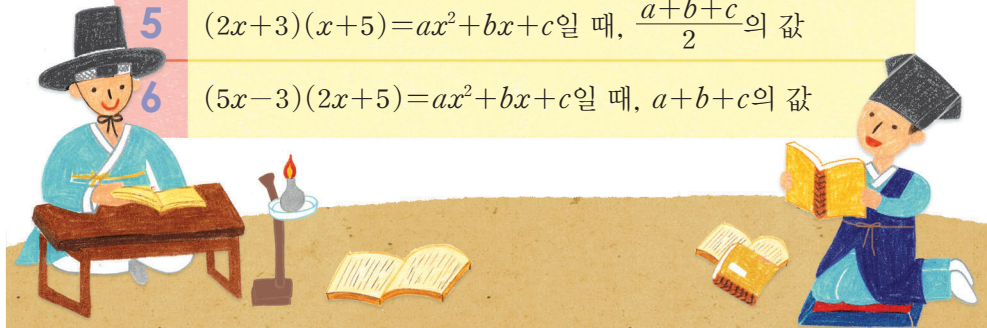
$$(ax+5)(3x+b)=-12x^2+39x-30$$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

8 과정을 다지는 문제

$(x-3)(2x+a)$의 전개식에서 x의 계수와 상수항이 같을 때, 상수 a의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

수학 놀이터

다항식의 곱셈을 이용하여 지수용육도 완성하기

● 다음은 「지수용육도(地數用六圖)」에 대한 설명이다. 다항식의 곱셈을 이용하여 아래 문제의 답을 각 문항 번호가 적힌 칸에 써넣어 주어진 지수용육도를 완성해 보자.

번호	문제
1	$(x+2)^2=x^2+ax+b$일 때, $a+b$의 값
2	$(3x+2)^2=ax^2+bx+c$일 때, $b-a$의 값
3	$(5x-1)(5x+1)=ax^2+b$일 때, $\frac{a+b}{2}$의 값
4	$(x-2)(2x+3)=ax^2+bx+c$일 때, $2a-b-c$의 값
5	$(2x+3)(x+5)=ax^2+bx+c$일 때, $\frac{a+b+c}{2}$의 값
6	$(5x-3)(2x+5)=ax^2+bx+c$일 때, $a+b+c$의 값

2.5 인수분해의 뜻

학|습|목|표

- 인수분해의 뜻을 안다.

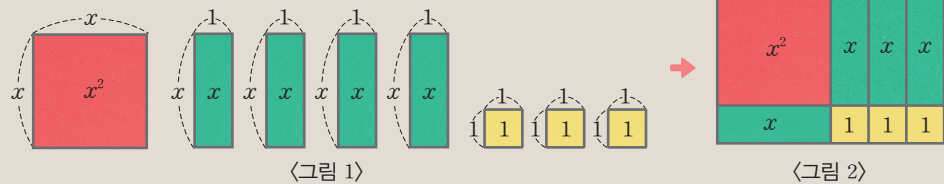
학|습|요|소

- 인수, 인수분해

생각 열기

수의 소인수분해와 다항식의 분해

다음은 〈그림 1〉과 같이 넓이가 x^2, x, 1인 세 종류의 대수 타일 8개를 이용하여 〈그림 2〉와 같이 하나의 직사각형을 만든 것입니다.

〈그림 1〉 〈그림 2〉

35를 5×7과 같이 소인수분해한 것처럼 하나의 다항식을 여러 개의 다항식의 곱으로 나타낼 수 있는지 생각해 봅시다.

활동 1 〈그림 1〉의 대수 타일 8개의 넓이의 합을 x를 사용한 식으로 나타내 보자.

활동 2 〈그림 2〉에서 만든 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 구해 보자.

생각 1

하나의 다항식을 여러 개의 다항식의 곱으로 나타낼 수 있나요?

생각 열기에서 〈그림 1〉의 대수 타일 8개의 넓이의 합을 x를 사용한 식으로 나타내면

$$x^2+4x+3$$

이다. 한편, 〈그림 2〉에서 만든 직사각형의 가로의 길이는 $x+3$, 세로의 길이는 $x+1$이다. 따라서 직사각형의 넓이는

$$(x+1)(x+3)$$

이므로

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

임을 알 수 있다.

이것은 $(x+1)(x+3)$을 전개한 식 $(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$의 좌변과 우변을 바꾸어 놓은 것과 같다.

따라서 다항식 x^2+4x+3은 $x+1$과 $x+3$의 곱으로 나타낼 수 있다.

이와 같이 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 식의 **인수**라고 한다.

예를 들어 $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$에서 $x+1$과 $x+3$은 x^2+4x+3의 인수이다.

또, 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 **인수분해**한다고 한다.

문제 1 다음 식은 어떤 다항식을 인수분해한 것인지 말하시오.

(1) $a(x+y)$ (2) $(x+3)^2$

(3) $(x+2)(x+4)$ (4) $(2x+3)(x-4)$

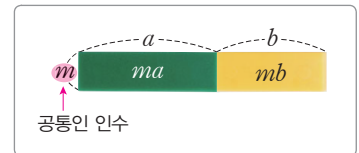
생각 2 다항식의 각 항에 공통으로 들어 있는 인수가 있을 때에는 어떻게 인수분해하나요?

다항식 $ma+mb$의 두 항 ma, mb에서 m은 각 항에 공통으로 들어 있는 인수이다.

이와 같이 다항식의 각 항에 공통인 인수가 있을 때에는 분배법칙을 이용하여 공통인 인수를 묶어 내어 인수분해할 수 있다.

예를 들어 $ma+mb$를 인수분해하면

$$ma+mb=m(a+b)$$

이다.

예제 1 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $ax+3ay$ (2) x^2y-6xy^2

다항식을 인수분해할 때에는 공통인 인수가 남지 않도록 한다.

풀이 | (1) ax와 $3ay$의 공통인 인수는 a이므로

$$ax+3ay=a\times x+a\times 3y=a(x+3y)$$

(2) x^2y와 $-6xy^2$의 공통인 인수는 xy이므로

$$x^2y-6xy^2=xy\times x+xy\times(-6y)=xy(x-6y)$$

답 (1) $a(x+3y)$ (2) $xy(x-6y)$

문제 2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $3a+ax$　　(2) x^2-5x

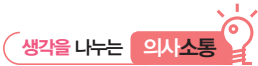
(3) ab^2-2a^2b　　(4) $4x^2y+12xy$

인수분해를 이용하여 $2023\times3.25+2023\times6.75$를 계산하시오.

풀이 | $2023\times3.25+2023\times6.75=2023\times(3.25+6.75)=2023\times10=20230$

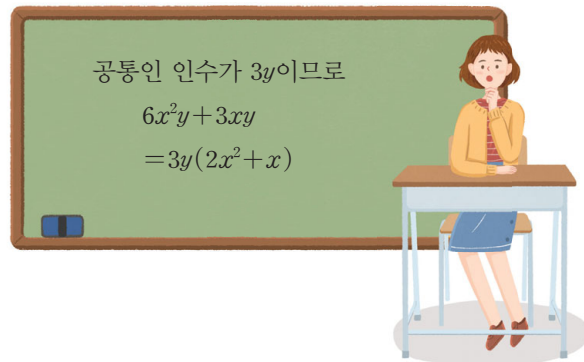
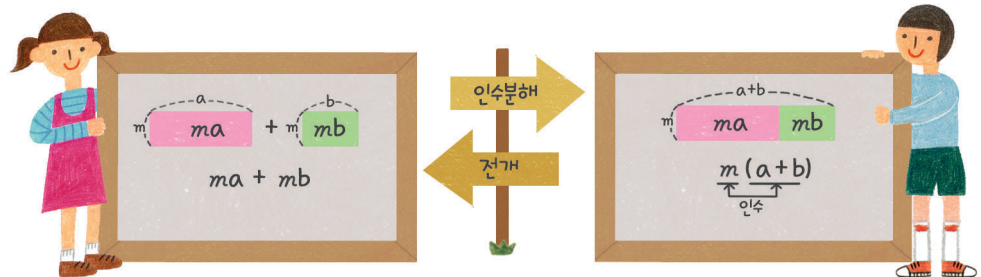
답 20230

문제 3 인수분해를 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) $208\times3.75+792\times3.75$　　(2) $4.23\times148-4.23\times48$

다음은 지원이가 다항식 $6x^2y+3xy$를 인수분해한 것이다. 잘못된 부분을 찾아 바르게 고치고, 왜 그렇게 고쳤는지 말해 보자.

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 식의 ☐라고 한다.

(2) 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 ☐한다고 한다.

2

다음 식은 어떤 다항식을 인수분해한 것인지 말하시오.

(1) $3x(x+4y)$ (2) $(2x-5)^2$

(3) $(2x+3)(2x-3)$ (4) $(x-2)(x-4)$

3

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2+2x (2) x^2y-3xy^2

(3) $3a^2b-2ab^2+7ab$ (4) $2ab-5bc+3bd$

4

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $3x^2+6xy$ (2) $6x^2y-4xy^2$

(3) $8x^2y+12xy$ (4) $10ax^2-5ax$

5

인수분해를 이용하여

$$365\times3.23-365\times1.23$$

을 계산하시오.

6 추론

다음 두 다항식의 공통인 인수를 구하시오.

$3xz+6yz$, $2x^2y+4xy^2$

7 과정을 다지는 문제

다항식 $axy-6y^2$을 인수분해하면 $3y(3x-2y)$일 때, 상수 a의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

2.6 $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$의 인수분해

학|습|목|표

- $a^2+2ab+b^2$과 $a^2-2ab+b^2$을 인수분해할 수 있다.
- 완전제곱식의 뜻을 이해한다.

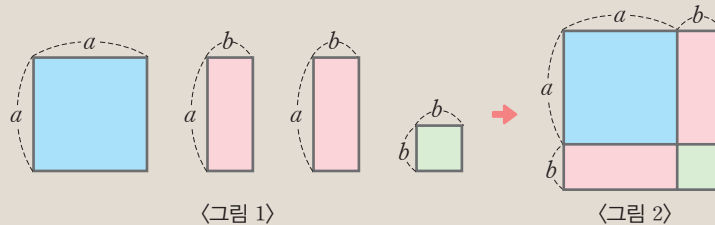
학|습|요|소

- 완전제곱식

생각 열기

정사각형의 넓이

다음은 〈그림 1〉과 같이 넓이가 a^2, ab, b^2인 세 종류의 직사각형 4개를 모두 사용하여 〈그림 2〉와 같이 하나의 큰 정사각형을 만든 것입니다. 새로 만든 정사각형의 넓이를 생각해 봅시다.

〈그림 1〉 〈그림 2〉

활동 1 〈그림 1〉의 직사각형 4개의 넓이의 합을 구해 보자.

활동 2 〈그림 2〉에서 만든 정사각형의 넓이를 (한 변의 길이)^{2}으로 나타내 보자.

생각 1 **〈그림 2〉에서 만든 정사각형의 넓이를 어떻게 나타낼 수 있나요?**

생각 열기에서 〈그림 1〉의 직사각형 4개의 넓이는 a^2, ab, ab, b^2이므로 넓이의 합은

$$a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

이다. 한편, 〈그림 2〉에서 만든 정사각형의 한 변의 길이는 $a+b$이므로 그 넓이는

$$(a+b)^2$$

이다. 따라서 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$임을 알 수 있다.

이것은 곱셈 공식

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

의 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓은 것과 같다.

따라서 다항식 $a^2+2ab+b^2$을

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

과 같이 인수분해할 수 있다.

마찬가지로 곱셈 공식 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓으면

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

임을 알 수 있다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$의 인수분해

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^2+4a+4 (2) $x^2-12xy+36y^2$

풀이 | (1) $a^2+4a+4=a^2+2\times a\times 2+2^2=(a+2)^2$

(2) $x^2-12xy+36y^2=x^2-2\times x\times 6y+(6y)^2=(x-6y)^2$

답 (1) $(a+2)^2$ (2) $(x-6y)^2$

문제 1 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2+2x+1 (2) $a^2-8a+16$

(3) $4x^2+20xy+25y^2$ (4) $16a^2-24ab+9b^2$

주어진 식에 공통인 인수가 있을 때에는 먼저 공통인 인수를 묶어 낸 후 인수분해한다.

예 다항식 $ax^2+4ax+4a$에서 먼저 공통인 인수 a를 묶어 낸 후 괄호 안의 식 x^2+4x+4를 인수분해하면

$$ax^2+4ax+4a=a(x^2+4x+4)=a(x+2)^2$$

이다.

문제 2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $4x^2y+4xy+y$ (2) $16xy^2+8xy+x$

(3) $5x^2-50xy+125y^2$ (4) $18a^2-24ab+8b^2$

$(a+b)^2$, $2(a-b)^2$, $-3(2x-5y)^2$과 같이 다항식의 제곱으로 이루어진 식 또는 이 식에 상수를 곱한 식을 **완전제곱식**이라고 한다.

예제 2

다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $x^2+10x+\square$ (2) $x^2+\square+16y^2$

풀이 | (1) $x^2+10x+\square=x^2+2\times x\times5+\square=(x+5)^2$이므로 $\square=5^2=25$

(2) $x^2+\square+16y^2=x^2+\square+(4y)^2=(x+4y)^2$ 또는

$x^2+\square+16y^2=x^2+\square+(-4y)^2=(x-4y)^2$

따라서 $\square=2\times x\times4y=8xy$ 또는 $\square=2\times x\times(-4y)=-8xy$

답 (1) 25 (2) $8xy$ 또는 $-8xy$

문제 3 다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $x^2-16x+\square$ (2) $a^2+18ab+\square$

(3) $a^2+\square+4$ (4) $9x^2+\square+4y^2$

$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$일 때, $x^2+2xy+y^2$의 값을 주원이와 서영이의 방법으로 구해 보고, 두 학생의 풀이 방법을 비교하여 말해 보자.

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $a^2+2ab+b^2=(\square)^2$

(2) $a^2-2ab+b^2=(\square)^2$

(3) $(a+b)^2$, $2(a-b)^2$, $-3(2x-5y)^2$과 같이 다항식의 제곱으로 이루어진 식 또는 이 식에 상수를 곱한 식을 $\square$이라고 한다.

2

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2+6x+9 (2) $a^2-10a+25$

(3) $x^2+14x+49$ (4) $a^2-16a+64$

3

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $4x^2-4x+1$ (2) $25x^2+20x+4$

(3) $16x^2+24xy+9y^2$ (4) $36x^2-60xy+25y^2$

4

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $4x^2+24x+36$ (2) $ax^2-18ax+81a$

(3) $3a^2x+30ax+75x$ (4) $2ax^2-12ax+18a$

5

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $\frac{9}{4}x^2+4x+\frac{16}{9}$ (2) $\frac{1}{25}x^2-\frac{1}{10}x+\frac{1}{16}$

6

다음 식이 완전제곱식이 되도록 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $x^2+22x+\square$ (2) $25x^2-40x+\square$

(3) $x^2+\square+9y^2$ (4) $4x^2+\square+49$

7 추론

$x=\sqrt{5}+\sqrt{3}$, $y=2\sqrt{5}+3\sqrt{3}$일 때, $9x^2-6xy+y^2$의 값을 구하시오.

8 과정을 다지는 문제

다항식 $(x+4)(x-2)+k$가 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

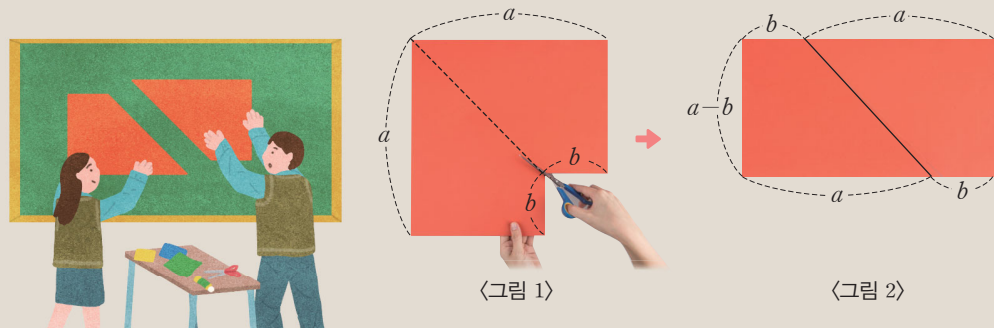
2.7 a^2-b^2의 인수분해

학|습|목|표

- a^2-b^2을 인수분해할 수 있다.

도형의 넓이

다음 〈그림 1〉은 한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 종이에서 한 변의 길이가 b인 정사각형을 잘라 낸 것이고, 〈그림 2〉는 〈그림 1〉에서 점선을 따라 잘라서 생긴 두 조각을 겹치지 않게 이어 붙여 만든 직사각형입니다. 〈그림 1〉과 〈그림 2〉의 도형의 넓이를 생각해 봅시다.

〈그림 1〉 〈그림 2〉

활동 1 〈그림 1〉에서 만든 도형의 넓이를 구해 보자.

활동 2 〈그림 2〉에서 만든 직사각형의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내 보자.

생각 1 **〈그림 1〉과 〈그림 2〉의 도형의 넓이를 각각 어떻게 나타낼 수 있나요?**

생각 열기에서 〈그림 1〉의 도형의 넓이는 a^2-b^2이다. 한편, 〈그림 2〉는 가로의 길이가 $a+b$, 세로의 길이가 $a-b$인 직사각형이므로 그 넓이는

$$(a+b)(a-b)$$

이다. 따라서 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$임을 알 수 있다.

이것은 곱셈 공식

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

의 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓은 것과 같다.

따라서 다항식 a^2-b^2을

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

와 같이 인수분해할 수 있다.

앞의 내용을 정리하면 다음과 같다.

a^2-b^2의 인수분해

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^2-4　　　　(2) $4x^2-49y^2$

풀이 | (1) $a^2-4=a^2-2^2=(a+2)(a-2)$

(2) $4x^2-49y^2=(2x)^2-(7y)^2=(2x+7y)(2x-7y)$

답 (1) $(a+2)(a-2)$　(2) $(2x+7y)(2x-7y)$

문제 1 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2-16　　　　(2) $-9a^2+49$

(3) $25x^2-64y^2$　　　　(4) $18a^2-8b^2$

동료 평가

• 친구의 풀이 방법이 적절한가?

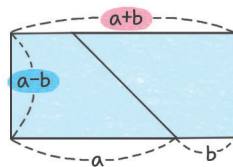
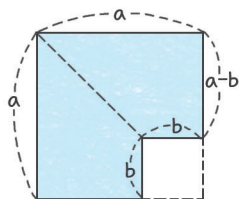
다음 문제에서 밑줄 친 수를 다른 자연수로 바꾸어 새로운 문제를 만들고, 만든 문제의 풀이를 친구와 이야기해 보자.

문제 $\underline{251}^2-\underline{249}^2$을 계산하시오.

풀이 $251^2-249^2=(251+249)(251-249)=500\times2=1000$

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $a^2-b^2=(a+b)(\square)$

(2) $x^2-y^2=(\square)(x-y)$

2

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2-81　(2) $4a^2-25$

(3) $16x^2-49$　(4) $9a^2-64$

3

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $8x^2-18$　(2) $27a^2-12$

(3) $4x^2-16y^2$　(4) $3ax^2-27a$

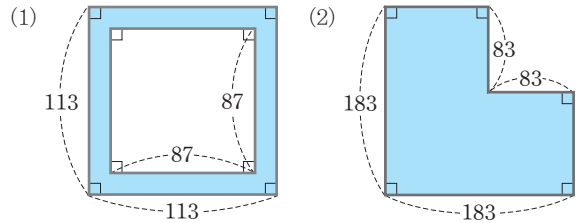
4

인수분해를 이용하여 77^2-23^2을 계산하시오.

5

다음 도형에서 색칠한 부분의 넓이를 인수분해를 이용하여 구하시오.

(1)

(2)

6 추론

인수분해를 이용하여

$$\frac{2024\times2025-2024\times7}{2021^2-9}$$

을 계산하시오.

7 과정을 다지는 문제

$a=\sqrt{5}-\sqrt{3}$, $b=\sqrt{5}+\sqrt{3}$일 때, a^2-b^2의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

인수분해를 이용한 소수 판별

다음 대화를 읽고, 인수분해를 이용하여 주어진 수가 소수가 아님을 설명하는 방법을 생각해 보자.

선생님

9991이 소수인지 아닌지 알 수 있나요?

준서

2, 3, 5, 7, 11, …로 9991을 차례로 나누어 보면 알 수 있어요! 하지만 시간이 많이 걸릴 것 같아요.

선생님

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용해 볼까요?

준서

9991은 10000−9이므로 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용하면
$9991=100^2-3^2=(100+3)(100-3)=103\times97$로 나타낼 수 있어요.

선생님

네, 맞아요! 9991의 약수는 1과 9991 이외에 97, 103이 있으므로 9991은 소수가 아니에요.

준서

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$의 형태만 이용할 수 있나요?

선생님

아니요, 529는 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$을 이용하여 소수가 아님을 설명할 수 있어요. 즉,
$529=400+120+9=20^2+2\times20\times3+3^2=(20+3)^2=23^2$으로 나타내면 529의 약수는 1과 529 이외에 23이 있으므로 소수가 아니에요.
또, 361은 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$을 이용하여 소수가 아님을 설명할 수 있어요.

준서

아! $361=400-40+1=20^2-2\times20\times1+1^2=(20-1)^2=19^2$으로 나타내면 361의 약수는 1과 361 이외에 19가 있으므로 소수가 아니네요.

1. 다음 수가 소수가 아님을 a^2-b^2의 인수분해를 이용하여 설명해 보자.

(1) 851　　　　(2) 2419

2. 다음 수가 소수가 아님을 $a^2+2ab+b^2$ 또는 $a^2-2ab+b^2$의 인수분해를 이용하여 설명해 보자.

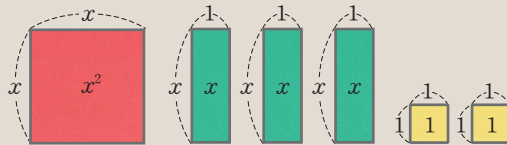
(1) 841　　　　(2) 3721

2.8 $x^2+(a+b)x+ab$, $acx^2+(ad+bc)x+bd$ 의 인수분해

학|습|목|표

• $x^2+(a+b)x+ab$, $acx^2+(ad+bc)x+bd$를 인수분해할 수 있다.

대수 타일을 이용하여 직사각형 만들기

다음 그림과 같이 넓이가 x^2, x, 1인 세 종류의 대수 타일 6개를 모두 이용하여 하나의 직사각형을 만드는 방법을 생각해 봅시다.

활동 1 대수 타일 6개의 넓이의 합을 구해 보자.

활동 2 대수 타일 6개를 모두 이용하여 하나의 직사각형을 만들어 보고, 만들어진 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 구해 보자.

생각 1 **대수 타일을 모두 이용하여 만든 직사각형의 넓이를 어떻게 나타낼 수 있나요?**

생각 열기에서 대수 타일 6개의 넓이는 각각 x^2, x, x, x, 1, 1이므로 그 넓이의 합은

$$x^2+x+x+x+1+1=x^2+3x+2$$

이다.

한편, 주어진 대수 타일을 모두 이용하여 하나의 직사각형을 오른쪽 그림과 같이 만들 수 있다.

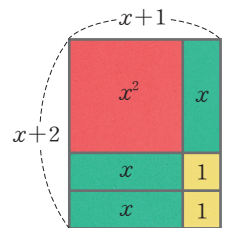
이때 만들어진 직사각형의 가로의 길이는 $x+1$, 세로의 길이는 $x+2$이다.

따라서 직사각형의 넓이는

$$(x+1)(x+2)$$

이므로

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

임을 알 수 있다.

이것은 $(x+1)(x+2)$를 전개한 식

$$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$$

의 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓은 것과 같다.

따라서 다항식 x^2+3x+2를

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

와 같이 인수분해할 수 있다.

생각 2

다항식 $x^2+(a+b)x+ab$는 어떻게 인수분해하나요?

곱셈 공식

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓으면

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

임을 알 수 있다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

$x^2+(a+b)x+ab$의 인수분해

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$를 이용하여 다항식 x^2+5x+6을 인수분해하여 보자.

다항식 $x^2+(a+b)x+ab$와 다항식 x^2+5x+6을 비교하면

$$a+b=5,\ ab=6$$

이다. 이때 합이 5이고, 곱이 6인 두 정수 a, b를 찾으면

$$x^2+5x+6=(x+a)(x+b)$$

와 같이 인수분해할 수 있다.

$x^2+(a+b)x+ab$
$x^2\ \ +5x\ \ +6$

오른쪽 표에서 곱이 6인 두 정수 중에서 그 합이 5인 수는 2와 3이므로

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

과 같이 인수분해할 수 있다.

곱이 6인 두 정수	두 정수의 합
1, 6	7
2, 3	5
−1, −6	−7
−2, −3	−5

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^2+5x+4　　(2) x^2-5x+6

풀이 | (1) 오른쪽 표에서 곱이 4인 두 정수 중에서 합이 5인 수는 1과 4이므로

$$x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$$

곱이 4인 두 정수	두 정수의 합
1, 4	5
2, 2	4
-1, -4	-5
-2, -2	-4

(2) 오른쪽 표에서 곱이 6인 두 정수 중에서 합이 -5인 수는 -2와 -3이므로

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

곱이 6인 두 정수	두 정수의 합
1, 6	7
2, 3	5
-1, -6	-7
-2, -3	-5

답 (1) $(x+1)(x+4)$　(2) $(x-2)(x-3)$

문제 1 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+11x+30$　　(2) x^2-5x+4

(3) $x^2+2x-15$　　(4) $x^2-3x-28$

생각 3 **다항식 $acx^2+(ad+bc)x+bd$는 어떻게 인수분해하나요?**

곱셈 공식

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓으면

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

임을 알 수 있다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

$acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$를 이용하여 다항식 $2x^2-5x-3$을 인수분해하여 보자.

다항식 $acx^2+(ad+bc)x+bd$와 다항식 $2x^2-5x-3$을 비교하면

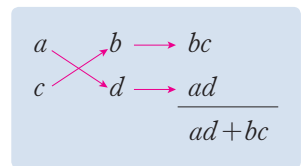
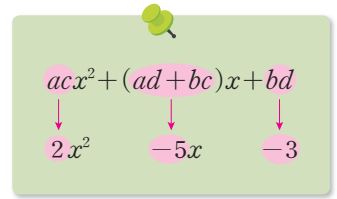
$$ac=2,\ ad+bc=-5,\ bd=-3$$

이다. 이때 이 식을 만족시키는 네 정수 a, b, c, d를 찾으면

$$2x^2-5x-3=(ax+b)(cx+d)$$

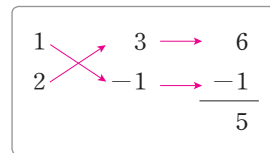
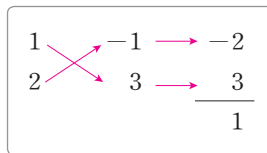
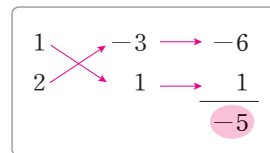
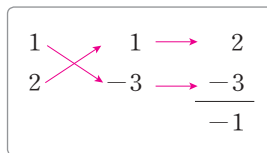
와 같이 인수분해할 수 있다.

$ac=2$인 양의 정수 a, c와 $bd=-3$인 정수 b, d를 찾아 아래쪽과 같이 나열한 후에 $ad+bc=-5$가 되는 네 정수 a, b, c, d를 찾는다.

$a \quad b \rightarrow bc$
$c \quad d \rightarrow ad$
$ad+bc$

$ac=2$에서 a와 c는 모두 양수 또는 모두 음수이지만 모두 양수로 생각하여 문제를 푼다.

$1 \quad 1 \rightarrow 2$
$2 \quad -3 \rightarrow -3$
-1

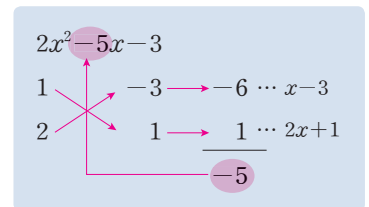
$1 \quad -3 \rightarrow -6$
$2 \quad 1 \rightarrow 1$
-5

$1 \quad -1 \rightarrow -2$
$2 \quad 3 \rightarrow 3$
1

위에서 $a=1$, $b=-3$, $c=2$, $d=1$일 때

$$ad+bc=1\times1+(-3)\times2=-5$$

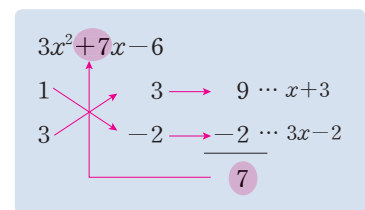
이므로

$$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)$$

과 같이 인수분해할 수 있다.

다항식 $3x^2+7x-6$을 인수분해하시오.

풀이 | $ac=3$, $ad+bc=7$, $bd=-6$을 만족시키는 네 정수 a, b, c, d를 찾으면 오른쪽과 같으므로

$$3x^2+7x-6=(x+3)(3x-2)$$

답 $(x+3)(3x-2)$

문제 2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $2x^2+7x+3$　　(2) $2x^2-9x-5$

(3) $3x^2-11x+6$　　(4) $6x^2+11xy-10y^2$

생각을 나누는 **의사소통**

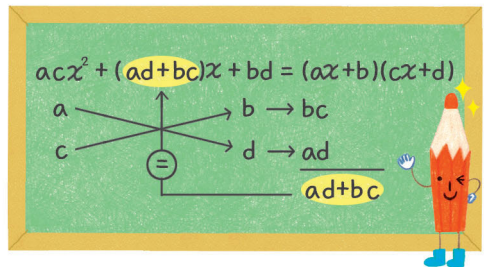
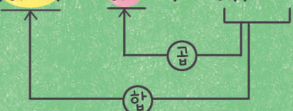
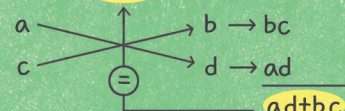
동료 평가

- 친구는 준서와 수빈이의 방법으로 각각 풀어 보았는가?
- 친구는 내가 비교하여 말한 것을 잘 경청하였는가?

다항식 $(x+2)^2-9$를 준서와 수빈이의 방법으로 인수분해해 보고, 두 학생의 풀이 방법을 비교하여 친구와 이야기해 보자.

수학 집 짓기

스스로 해결하기

1

다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $x^2+(a+b)x+ab=(\square)(x+b)$

(2) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(\square)$

2

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+8x+15$ (2) x^2+x-2

(3) x^2-7x+6 (4) x^2-3x-4

3

다음 식을 인수분해하시오.

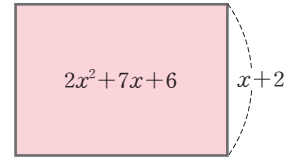
(1) $4x^2+13x+9$ (2) $2x^2-x-10$

(3) $5x^2-12x+4$ (4) $21x^2+x-2$

4

다항식 $(x-3)(x+5)-20$을 인수분해하시오.

5

오른쪽 그림과 같이 넓이가 $2x^2+7x+6$인 직사각형의 세로의 길이가 $x+2$일 때, 이 직사각형의 둘레의 길이를 구하시오.

6 추론

x^2의 계수가 1인 어떤 이차식을 인수분해하는데, 정현이는 x의 계수를 잘못 보아 $(x-3)(x-1)$로 인수분해하였고 민욱이는 상수항을 잘못 보아 $(x+2)^2$으로 인수분해하였다. 처음 이차식을 바르게 인수분해하시오.

7 과정을 다지는 문제

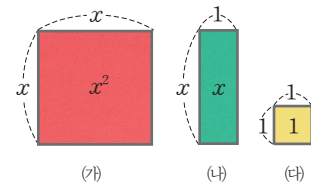
두 다항식 x^2+ax+4와 x^2+2x+b의 공통인 인수가 $x-4$일 때, 다항식 x^2+ax+b를 인수분해하고, 그 풀이 과정을 쓰시오. (단, a, b는 상수)

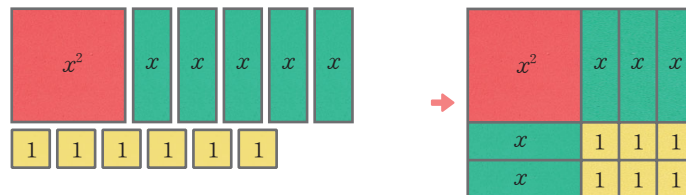
인수분해를 이용한 관람 순서 정하기

● 숭례문에서 출발하여 조선 5대 궁궐과 종묘를 한 번씩 관람하고 흥인지문에 도착하려고 한다. 현재 위치한 장소에 적힌 암호식을 인수분해한 후, 그것과 공통인 인수를 가지고 있는 암호식이 적힌 장소를 다음 관람 장소로 정하려고 할 때, 숭례문에서 출발하여 어떤 순서로 관람해야 하는지 구해 보자.

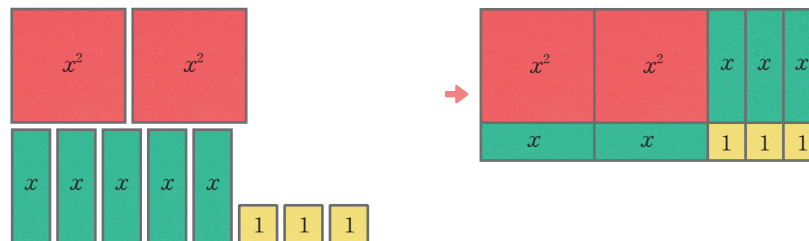
수학실험실

대수 타일을 이용한 인수분해

오른쪽 그림에서 대수 타일 ㈎는 한 변의 길이가 x인 정사각형, 대수 타일 ㈏는 가로의 길이가 1, 세로의 길이가 x인 직사각형, 대수 타일 ㈐는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다.

❶ 대수 타일 ㈎, ㈏, ㈐를 이용하여 x^2+5x+6의 인수분해를 해 보자.

x^2+5x+6을 대수 타일로 표현하기 ➜ 직사각형 만들기

만들어진 직사각형의 가로의 길이는 $x+3$, 세로의 길이는 $x+2$이므로 x^2+5x+6을 인수분해하면 $(x+3)(x+2)$이다.

❷ 대수 타일 ㈎, ㈏, ㈐를 이용하여 $2x^2+5x+3$의 인수분해를 해 보자.

$2x^2+5x+3$을 대수 타일로 표현하기 ➜ 직사각형 만들기

만들어진 직사각형의 가로의 길이는 $2x+3$, 세로의 길이는 $x+1$이므로 $2x^2+5x+3$을 인수분해하면 $(2x+3)(x+1)$이다.

대수 타일을 이용하여 다음 식을 인수분해해 보자.

(1) x^2+4x+3

(2) $x^2+7x+12$

(3) $3x^2+7x+4$

(4) $6x^2+11x+3$

단원 마무리

01

$(x+3y)(2x-5y)$를 전개할 때, xy의 계수와 y^2의 계수의 합을 구하시오.

02

$(3x+a)^2=9x^2-12x+b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수)

03

$\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$을 전개하시오.

04

$(2x-3)(-2x-3)$을 전개하시오.

05

$(x+a)^2-(x-4)(x+3)$을 간단히 하면 x의 계수가 7일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

06

한 변의 길이가 x인 정사각형에서 가로의 길이를 $3a$만큼 늘이고, 세로의 길이를 a만큼 줄여서 만든 직사각형의 넓이가 x^2+4x+b일 때, ab의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수)

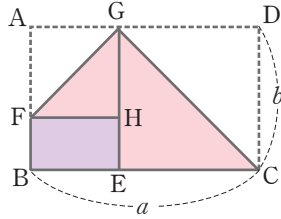
07

곱셈 공식을 이용하여 83×77을 계산하시오.

08

$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$의 값을 구하시오.

09 서술형

가로의 길이가 a, 세로의 길이가 $b\,(b<a<2b)$인 직사각형 모양의 종이 ABCD를 오른쪽 그림과 같이 접었다. 이때 사각형 FBEH의 넓이를 a, b를 사용한 식으로 나타내시오. (단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

10

다음 보기 중에서 인수분해를 바르게 한 것을 모두 찾으시오.

보기

ㄱ. $x^2+6x+9=(x+6)^2$

ㄴ. $4x^2-25=(2x+5)(2x-5)$

ㄷ. $x^2+x-30=(x-6)(x+5)$

ㄹ. $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

ㅁ. $3x^2+5x-2=(3x+1)(x-2)$

11

다항식 x^2-8x+a를 인수분해하면 $(x+b)^2$이라고 할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

12

$9x^2+42x+8k+1$이 완전제곱식일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

13 서술형

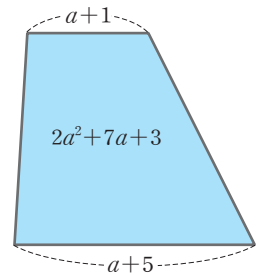
일차항의 계수가 1인 두 일차식의 곱이 $x^2-3x-40$일 때, 두 일차식의 합을 구하시오.

(단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

14

넓이가 $6a^2+11a-10$인 직사각형의 가로의 길이가 $3a-2$일 때, 이 직사각형의 둘레의 길이를 구하시오.

15

오른쪽 그림과 같은 사다리꼴의 넓이가 $2a^2+7a+3$일 때, 이 사다리꼴의 높이를 구하시오.

16

x^2의 계수가 1인 어떤 이차식을 인수분해하는데, 수영이는 x의 계수를 잘못 보아 $(x-2)(x+3)$으로 인수분해하였고 윤미는 상수항을 잘못 보아 $(x+2)(x+3)$으로 인수분해하였다. 처음 이차식을 바르게 인수분해하시오.

문제 해결

17

두 정수 a, b에 대하여 $x^2+mx+8=(x+a)(x+b)$일 때, 정수 m의 값을 모두 구하시오.

창의 UP

18

$2018\times2024+9=a^2$일 때, 자연수 a의 값을 구하시오.

자기 평가

점검 항목		도달 정도		
		미흡	보통	우수
학습 내용	다항식의 곱셈을 할 수 있는가?			
	다항식의 제곱을 전개할 수 있는가?			
	합과 차로 이루어진 두 다항식의 곱을 전개할 수 있는가?			
	두 일차식의 곱을 전개할 수 있는가?			
	인수분해의 뜻을 이해하고 공통인 인수를 찾을 수 있는가?			
	$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$을 인수분해할 수 있는가?			
	a^2-b^2을 인수분해할 수 있는가?			
	$x^2+(a+b)x+ab$, $acx^2+(ad+bc)x+bd$를 인수분해할 수 있는가?			
학습 태도	수업 시간에 성실히 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			
	친구의 의견을 존중하고 경청하였는가?			

● 이 단원을 공부하면서 알게 된 점과 어려웠던 점은 무엇인지 써 보자.

창의+융합 프로젝트

혈액형의 비밀

수학+과학

혈액형을 분류하는 방법은 여러 가지가 있다. 그중에서 ABO식 혈액형은 1900년 의학자 란트슈타이너(Landsteiner, K., 1868~1943)에 의해 발견된 것으로 가장 일반적으로 쓰이는 방법이다.

ABO식 혈액형으로는 A형, B형, AB형, O형 네 가지가 있고 각각의 유전자형은 오른쪽 표와 같다.

유전자형	혈액형
AA, AO	A형
BB, BO	B형
AB	AB형
OO	O형

만약 부모로부터 유전자 A와 O를 물려받으면 자녀의 유전자형은 AO가 되므로 A형의 혈액형으로 나타난다.

이러한 관계는 다항식의 곱셈 원리를 이용하여 설명할 수 있다.

예를 들어 부모의 유전자형이 AB, BO일 때, 자녀의 유전자형은

$$(A+B)(B+O)=AB+AO+BB+BO$$

로부터 AB, AO, BB, BO의 네 가지이고, 이 경우 자녀에게 나타날 수 있는 혈액형은 AB형, A형, B형이다.

| 참고 | 위의 방법이 완벽한 것은 아니며, 발현 방법에 따라 희귀 혈액형의 경우에는 예외적인 경우도 있다.

[출처: 권석운, 『란트슈타이너가 들려주는 혈액형 이야기』]

1 부모의 유전자형이 AB, OO인 경우 자녀의 유전자형과 나타날 수 있는 혈액형을 다항식의 곱셈 원리를 이용하여 설명해 보자.

과제

2 부모의 혈액형이 A형, B형인데 O형 자녀가 태어났다. 이 경우에 부모의 유전자형을 다항식의 곱셈 원리를 이용하여 설명해 보자.

포트폴리오 평가

• 이 단원을 학습한 후 스스로 해결하기 및 단원 마무리 문제 해결, 자기 평가 작성, 창의+융합 프로젝트 과제 해결 등 모든 활동 결과를 확인하고 점검하였는가?